Los elusivos números primos

**Por: Klaus Ziegler**

### El peroné de un babuino, tallado hace más de doscientos siglos, registra lo que parece ser un antiquísimo calendario lunar.

El hueso, encontrado en la región de Ishango, cerca del nacimiento del Nilo, muestra tres columnas de pequeñas muescas asimétricas. En la columna izquierda se lee una lista de números primos, indicio de que algunas culturas del Paleolítico Superior ya los reconocían.

Podríamos decir que millones de años atrás la naturaleza también se había topado con el concepto. Impreso en el genoma de las cicadas periódicas de Norteamérica hay dos números primos. Cada 13, o 17 años, según la especie, estas cigarras brotan de los suelos, en nubes, por millones, para llenar el aire con sus coros estridentes. Su letargo interminable se ve por fin recompensado con una aventura amorosa tan impetuosa como fugaz. Tras el apareamiento, la calma regresa a la Tierra, los huevos eclosionan y las ninfas descienden de nuevo a sus sepulturas. A través de los siglos, las fuerzas ciegas de la evolución fueron depurando los ciclos vitales de estos insectos hasta suprimir sus divisores. La estrategia minimiza el número de coincidencias con los períodos reproductivos de sus depredadores.

Los primeros números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,… pueden hallarse por simple inspección. Los que siguen se pueden encontrar utilizando el antiguo método de Eratóstenes y su criba. Pero, ¿qué tan lejos se extiende la sucesión? El libro IX de la monumental obra de Euclides contiene la respuesta: ¡hasta el infinito! La demostración de este hecho extraordinario es una verdadera joya de la cultura humana: si existiesen finitos primos, adicionando el número uno al producto de todos ellos se obtendría un número que no podría ser primo, pues es mayor que cualquiera en la lista. Pero tampoco es compuesto, pues deja residuo la unidad cuando se divide por cualquiera de ellos. De esta simple contradicción deduce Euclides su infinitud.

No obstante haya infinitos números primos, asunto muy diferente es saber cómo encontrarlos, pues aunque “crecen como maleza entre los números naturales, nadie puede predecir dónde brotará el siguiente”. En su obra, “Cognitata Physico-Mathematica”, el monje y filósofo francés Marin Mersenne compiló una lista que, según sus cálculos, contendría todos los posibles primos de la forma 2^p-1 (se eleva 2 a la potencia p, y luego se resta 1). Predijo que para los exponentes p= 67 y p = 257, el correspondiente número debía ser primo. Pero en octubre de 1903, en una de las charlas científicas más breves que se recuerden, el matemático estadunidense F.N. Cole se levantó de su silla, y sin modular palabra escribió en la pizarra: 2^67-1 = 193707721 x 761838257287. No hubo preguntas, solo un sordo aplauso; Mersenne se había equivocado.

Igualmente, 2^257-1 tampoco resultó ser primo. El teólogo franciscano también erró cuando omitió los exponentes 61, 89 y 107, que sí dan lugar a primos, y jamás sospechó que pudiesen existir en ese género monstruos de varios millones de cifras. A pesar de sus desaciertos, estos números llevan por siempre su nombre.

Hasta finales del siglo XVI, el primo más grande conocido era 2^19-1 = 524,287. En 1772, Euler encontró el más grande de su época, uno por encima de mil millones: 2^31-1. Para comienzos del siglo XX, y mucho antes de la era electrónica, el mayor primo conocido tenía apenas 39 dígitos. El primero con más de cien se vino a conocer en 1952. En 2008 se superó el récord de las diez millones de cifras, (2^37,156,667-1) una proeza que varios cazadores de primos, asociados bajo la organización GIMPS (“Great Internet Mersenne Prime Search”), vieron recompensada con un premio de 100,000 dólares. Esta misma organización anunció el 25 de enero de este año el primo más grande conocido por la humanidad: un monstruo de Mersenne, 2^57,885,161-1, cuyas cifras escritas (más de 17 millones) ocuparían seis volúmenes de mil páginas cada uno.

Hasta la fecha solo se conocen 48 primos de Mersenne. Nadie sabe si hay infinitos. De ahí que nadie sepa tampoco si existen infinitos números perfectos, es decir, números iguales a la suma de sus divisores propios. Por ejemplo, 6 es perfecto, ya que sus divisores propios son 1, 2, 3, cuya suma es precisamente este mismo número. Alrededor del año 300 a.C., Euclides demostró que todo número de la forma (2^p-1)x2^(p-1), cuando el primer factor es primo, es un número perfecto (por ejemplo, para p=3, (2^3-1)x2^2 = 28 es perfecto). Siglos más tarde, Euler probó que cualquier número perfecto par debía tener esa forma.  
Hoy sabemos cómo pudo haberse originado el universo y podemos estimar sus dimensiones. Hemos descifrado el genoma de varias especies, incluyendo la nuestra. Tenemos una buena idea del árbol de la vida, desde las primeras procariotas termófilas hasta el Homo sapiens. Pero aún desconocemos si hay números perfectos impares. También ignoramos la solución al dificilísimo problema que Goldbach planteara en una célebre carta dirigida a Euler, en 1742, en la cual le pregunta por la demostración de una observación tan elemental que hasta podría haberla hecho un niño: todo número par es la suma de dos números primos (1 se consideraba primo en aquella época). La pregunta, a pesar de su simpleza, constituye una de las cuestiones más inaccesibles de las matemáticas, y quizá de toda la ciencia.

Preguntas como la formulada por Goldbach podrían estar situadas más allá de los confines de lo cognoscible. Desde Gödel, los matemáticos saben de la existencia de proposiciones “indecidibles” en cualquier formalismo lo suficientemente rico como para describir las propiedades de los números enteros. Esto significa que cualquiera de esos sistemas axiomáticos alberga proposiciones que no se pueden probar dentro del sistema mismo, y cuyas negaciones son así mismo indemostrables. Cabe preguntar si el mismo problema planteado por Goldbach podría caer en uno de esos limbos matemáticos, es decir, si pudiera ser una proposición indecidible. Por paradójico que parezca, de probarse indecidible se estaría demostrando con ello, y de manera indirecta, la afirmación misma, pues en particular se habría probado que la negación de la afirmación “todo par es suma de dos primos” es indemostrable. Luego nadie jamás podría exhibir un número par que no fuera suma de dos primos, pues esto último es ciertamente demostrable en la aritmética elemental (basta listar todos los primos menores que el supuesto par, y luego verificar que la suma de cada par de primos no coincide con él). El razonamiento anterior no demuestra que la afirmación de Goldbach no pueda ser indecidible, solo que si lo fuera nunca lo sabríamos.

Tal vez exista una región inexpugnable del mundo platónico habitada por proposiciones elementales, no obstante inasibles para cualquier inteligencia concebible en el universo. Quizá la realidad misma de ese mundo etéreo no sea más que otra ilusión de nuestra mente.